

Методические рекомендации
«Особенности подготовки к государственной итоговой аттестации (ЕГЭ) по
учебному предмету «Математика»»

Составитель:

*Подстригич А.Г., к.пед.н., старший преподаватель
центра развития педагогического мастерства ТОИПКРО*

Государственная итоговая аттестация (ГИА) по математике проводится в соответствии с Федеральным законом от 29.12.2012 № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации» и является обязательным экзаменом. ГИА по математике по образовательным программам среднего общего образования проходит в форме Единого государственного экзамена (ЕГЭ) для обучающихся, не имеющих академической задолженности и в полном объеме выполнивших учебный план по программам среднего общего образования. Государственная итоговая аттестация выпускников 11 классов нацелена на проверку предметных знаний и компетенций, заявленных в федеральном государственном образовательном стандарте (ФГОС).

Настоящие методические рекомендации нацелены на оказание методической помощи учителям общеобразовательных организаций Томской области, участвующих в подготовке школьников к государственной итоговой аттестации в форме единого государственного экзамена по математике (профильный уровень).

Краткая характеристика КИМ ЕГЭ по математике

Задания ЕГЭ именуются контрольно-измерительными материалами (КИМ), которые разрабатываются Федеральным институтом педагогических измерений (ФИПИ). Содержание КИМ регламентируется тремя документами, утверждаемыми Рособрнадзором: кодификатором элементов содержания КИМ, спецификацией экзамена и демоверсией экзамена. Таким образом, примерная структура, форма и содержание КИМ заранее определены и не могут быть изменены произвольным образом.

Экзамен по математике разделен на базовый и профильный уровни. Сдача базового экзамена по математике необходима для получения аттестата, а также для тех выпускников, которым для поступления в вузы во вступительных испытаниях не требуется «Математика». Сдача профильного уровня необходима для выпускников, которые собираются продолжить обучение в вузах, во вступительных испытаниях которых присутствует предмет «Математика».

ЕГЭ базового уровня предназначен для проверки достижения участниками экзамена основных предметных результатов, в частности способности производить бытовые расчеты и использовать математические знания для решения задач, возникающих в повседневной жизни. ЕГЭ профильного уровня предназначен для проверки освоения более широкого круга математических понятий и методов, необходимых для продолжения математического образования.

КИМ ЕГЭ 2023 года по математике профильного уровня сохранили преемственность с экзаменационной моделью 2022 года в тематике, примерном содержании и уровне сложности заданий.

Каждый вариант КИМ по математике профильного уровня состоял из двух частей и включал в себя 18 заданий, которые различались по содержанию и сложности:

– часть 1 содержала 11 заданий (задания 1–11) с кратким ответом в виде целого числа или конечной десятичной дроби;

– часть 2 содержала 7 заданий (задания 12–18) с развернутым ответом (полная запись решения с обоснованием выполненных действий).

Задания части 1 направлены на проверку освоения базовых умений и практических навыков применения математических знаний в повседневных ситуациях и предназначены для определения математических компетентностей выпускников образовательных организаций, реализующих программы среднего (полного) общего образования на базовом уровне.

Задания части 2 направлены на проверку освоения математики на профильном уровне, необходимом для применения в профессиональной деятельности, и на творческом.

Все экзаменационные задания относятся к трем учебным курсам: «Алгебра и начала математического анализа» – 12 заданий; «Геометрия» – 4 задания и «Вероятность и статистика» – 2 задания.

Задания варианта КИМ ЕГЭ распределены по уровням сложности:

- часть 1 содержала 6 заданий базового уровня (задания 1–3, 5–7) и 5 заданий повышенного уровня (задания 4, 8–11);

- часть 2 содержала 5 заданий повышенного уровня (задания 12–16) и 2 задания высокого уровня сложности (задания 17–18).

Правильное выполнение каждого из заданий 1–11 оценивалась 1 баллом. Проверка выполнения заданий 12–18 проводилась экспертами на основе разработанной системы критериев оценивания. Полное правильное решение каждого из заданий 12, 14 и 15 оценивалось 2 баллами; каждого из заданий 13 и 16 – 3 баллами; каждого из заданий 17 и 18 – 4 баллами.

В 2023 году содержание КИМ ЕГЭ по математике профильного уровня не изменилось по сравнению с экзаменационной моделью 2022 года. Однако в структуру части 1 КИМ внесены изменения, позволяющие участнику экзамена более эффективно организовать работу над заданиями за счет их перегруппировки по тематическим блокам. Работа начинается с заданий по геометрии (задания 1 и 2), затем следует блок заданий по элементам комбинаторики, статистике и теории вероятностей (задания 3 и 4), а затем идут задания по алгебре и началам математического анализа.

Таким образом, усилен акцент на проверку освоения элементов содержания, необходимых для успешного продолжения образования в вузах по IT, инженерным, естественнонаучным специальностям.

Первая часть работы (задания с краткими ответами) в 2023 году состояла из 11 заданий.

В начале рассмотрим задания базового уровня сложности. Задания 1 – 2 – задачи геометрического содержания базового уровня сложности, проверяли умение выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами. Задание 1 – задание по планиметрии, геометрическая задача на нахождение геометрических величин.

Задание 2 – стереометрическая задача на нахождение геометрических величин. Данное задание проверяет развитие пространственных представлений и знание формул объемов тел. Типичная ошибка – неверный учет масштаба.

Задания 3 – 4 – задачи на вычисление вероятности события. Задание 3 – задача по теории вероятностей на прямое вычисление вероятности. Задание 4 повышенного уровня сложности предполагало применение формулы произведения вероятностей независимых событий.

Задание 5 проверяет умение решать показательные уравнения, приводящиеся к линейным.

Задание 6 связано с преобразованием выражений, в 2023 году нахождение значения логарифмического выражения. Сложности вызывает переход к новому основанию. Следует уделять больше внимания отработке этой важной темы.

Задания 7 (базовый уровень), 10 и 11 (повышенный уровень) проверяли умения выполнять действия с функциями. Задание 7 – поиск точек экстремума функции по изображению графика производной этой функции.

Перейдем к анализу заданий повышенного уровня сложности из первой части работы.

Задание 4 в КИМ 2023 года – задача по теории вероятностей повышенного уровня. Типичные ошибки при выполнении задания показывают важность акцента при изучении курса вероятности и статистики именно на развитие умения анализировать вероятностную модель, а не формально заучивать правила и проводить вычисления по формулам.

Задание 8 – вычисление по формуле. Сложности вызывают чтение условия задачи, составление математической модели и алгебраические преобразования.

Задание 9 – повышенного уровня сложности связаны с умением читать график функции и выполнять действия, связанные с полученной информацией, текстовая задача на работу, на движение. Типичные ошибки связаны с неумением составить математическую модель, вычислительные ошибки составляют гораздо меньшую долю.

Задание 10 – выполнение действий с функциями.

Задание 11 – задача на нахождение наибольшего или наименьшего значения функции с использованием производной. Сложность задания связана с нахождением производной функции и недостаточной отработкой преобразований аналитической записи функции перед началом исследования.

Рассмотрим выполняемость заданий повышенного и высокого уровней сложности из второй части работы.

При выполнении этих заданий необходимо было применить знания материала, относящегося к различным разделам курса математики средней школы в новой ситуации. При решении требовалось не только найти ответ на поставленный вопрос, но и обосновать полученные выводы (записать решение). Решения должны были соответствовать таким требованиям как последовательность и логичность изложения, обоснованность ключевых моментов решения, использование ссылок на свойства и признаки математических объектов, изученные формулы.

Задание 12 – тригонометрическое уравнение. Задание повышенного уровня сложности с развернутым ответом, максимальный балл – 2.

Задание 13 – геометрическая задача (стереометрия) проверяет знание признака параллельности прямой и плоскости, умение строить сечение и находить угол между плоскостями.

Задание 14 – решение неравенства, проверяет умение решать логарифмические неравенства, а также знание свойств логарифмов. Задание повышенного уровня сложности с развернутым ответом, максимальный балл – 2. Верное выполнение заданий данного типа требует развитых умений работы с алгебраическими выражениями, грамотной работы с переменными. Как и в других заданиях с развернутым ответом, участник экзамена должен привести полный, математически корректный и обоснованный путь решения.

Задание 15 – практико-ориентированная задача. Задание повышенного уровня сложности с развернутым ответом, максимальный балл – 2. Задание имеет практико-ориентированный характер, задача с экономическим содержанием и позволяет участнику экзамена продемонстрировать умения анализировать условие задачи,

составлять математическую модель и находить обоснованный ответ, используя изученные математические методы.

Задание 16 – геометрическая задача (планиметрия). Задание повышенного уровня с развернутым ответом, максимальный балл – 3. Недостаточное внимание уделяется преподаванию геометрии в основной школе, и если ликвидировать пробелы при решении задач базового уровня сложности и анализе простейших геометрических конструкций за время повторения реально, то сформировать культуру рассуждений и доказательств, необходимых для полноценного решения многоходовой задачи, крайне тяжело.

Задание 17 – уравнение с параметром, проверяет умение решать систему уравнений с параметром и определять количество корней. Задание высокого уровня сложности с развернутым ответом, максимальный балл – 4. Необходимо решать простейшие задачи с параметром как при изучении линейной и квадратичной функций в основной школе, так и при итоговом повторении.

Задание 18 – целочисленная арифметика, перебор вариантов, доказательство, связано с умением строить и решать математические модели. Задание высокого уровня сложности с развернутым ответом, максимальный балл – 4. Задание позволяет участнику экзамена продемонстрировать уровень сформированности математической культуры, умение применять изученные методы в нестандартной ситуации решения задач, в которой главным компонентом является не преодоление технических сложностей, а поиск пути решения. Задача имеет исследовательский характер, требуя подчас проверки подтверждения или опровержения гипотез.

В рамках проведенного анализа необходимо отметить улучшение показателей успешности выполнения восьми из одиннадцати заданий с кратким ответом в 2023 году по сравнению с 2022 годом. Задания базового и повышенного уровней сложности с кратким ответом проверяли умения использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни; выполнять действия с геометрическими фигурами; вычислять вероятности событий и значения выражений; исследовать простейшие математические модели; решать показательные, логарифмические, иррациональные, рациональные уравнения.

Содержательный анализ выполнения заданий КИМ ЕГЭ по математике

Включенные в КИМ ЕГЭ задания выявляют достижение метапредметных и предметных результатов освоения основной образовательной программы среднего общего образования. При выполнении заданий, помимо предметных знаний, умений, навыков и способов познавательной деятельности, востребованы также универсальные учебные познавательные, коммуникативные и регулятивные (самоорганизация и самоконтроль) действия.

В 2023 году задания ЕГЭ по математике профильного уровня относились к трем тематическим модулям: «Практико-ориентированные задания», «Алгебра и начала анализа», «Геометрия».

Содержание экзаменационной работы дает возможность проверить комплекс умений по предмету:

- уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни;
- уметь выполнять вычисления и преобразования;
- уметь решать уравнения и неравенства;
- уметь выполнять действия с функциями;
- уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами;

- уметь строить и исследовать математические модели.

К модулю «Практико-ориентированные задачи» относились задания 3, 9 и 4 первой части и задание 15 второй части, в том числе задания 2 и 4 на элементы курса комбинаторики, статистики и теории вероятностей. Модуль «Алгебра и начала анализа» был представлен заданиями 5, 6, 7 базового уровня сложности и заданиями 8, 10, 11, 12, 14, 17 и 18 повышенного и высокого уровней сложности. Этот модуль содержал четыре задания с развернутым ответом. К модулю «Геометрия» относились задания 1, 2 первой части и задания 13, 16 второй части.

Проверяемые элементы содержания, изучаемые в учебном курсе «Алгебра и начала математического анализа», традиционно осваиваются лучше, чем элементы курса «Геометрия». Результаты профильного и базового экзаменов в 2023 году не стали исключением. И на базовом, и на профильном уровнях участники в целом продемонстрировали приемлемую технику преобразований и вычислений и решения уравнений. Тем не менее ошибки, в том числе при раскрытии скобок и простейших преобразованиях, остаются одной из основных причин неверного выполнения заданий: при правильных рассуждениях и разумном алгоритме решения обучающиеся часто получают неверный ответ за счет ошибок в решении простейших уравнений и при выполнении арифметических действий.

В геометрии иная картина. Количество геометрических конфигураций, возникающих даже в несложных задачах с двумя-тремя объектами, огромно. При этом определенный рост акцента в экзамене профильного уровня на важные для инженерных специальностей геометрические задания способствовал росту геометрической подготовки выпускников.

Участники профильного экзамена в 2023 году, как и прежде, демонстрируют высокую степень овладения базовыми умениями: решение уравнений различных типов, простейшие геометрические умения.

Приведем примеры заданий с кратким ответом, решаемость которых в 2023 году оказалась меньше 80%.

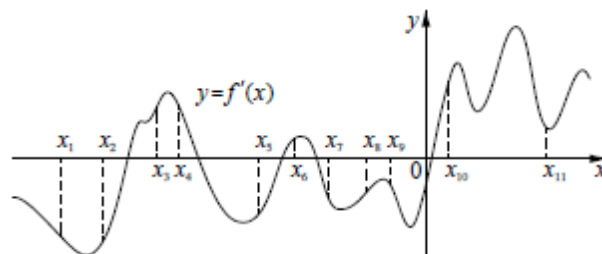
Задание 4. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,06. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,96. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

Неплохо справились участники экзамена с выполнением новой линии (с 2022 года) задания повышенного уровня сложности с кратким ответом, проверяющего умение моделировать реальные ситуации на языке теории вероятностей и статистики и требующего знания фактов и теорем теории вероятностей, изучаемых в курсе основной школы.

Задание 6. Найдите значение выражения $\log_{0,7} 10 - \log_{0,7} 7$.

Задание базового уровня проверяет умение выполнять вычисления и преобразования. Типичные ошибки: незнание формул логарифмических преобразований и вычислительные ошибки.

Задание 7. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечено одиннадцать точек: $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{10}, x_{11}$. Сколько из этих точек принадлежит промежуткам убывания функции $f(x)$?



Задание проверяет умение применять производную к исследованию функции, а также умение определять связь между характером монотонности функции и знаком ее производной, по графику производной функции характеризовать свойства самой функции.

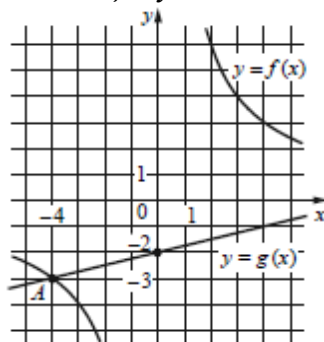
Задание 8. При сближении источника и приёмника звуковых сигналов, движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу со скоростями u и v (в м/с) соответственно, частота звукового сигнала f (в Гц), регистрируемого приёмником, вычисляется по формуле $f = f_0 \cdot \frac{c+u}{c-v}$, где $f_0 = 160$ Гц – частота исходного сигнала, c – скорость распространения сигнала в среде (в м/с), а $u = 8$ м/с и $v = 11$ м/с – скорости источника и приёмника относительно среды. При какой скорости распространения сигнала в среде частота сигнала в приёмнике будет равна 170 Гц? Ответ дайте в м/с.

Задание проверяет сформированность умения использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни, в частности – применять готовую формулу в расчетах для нахождения значения одного из параметров. Помимо прямого применения формулы, требуется решить простейшее дробно-рациональное уравнение.

Задание 9. Заказ на изготовление 192 деталей первый рабочий выполняет на 4 часа быстрее, чем второй. Сколько деталей за час изготавливает второй рабочий, если известно, что первый за час изготавливает на 4 детали больше.

Задание проверяет сформированность умения использовать математические знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни. Для выполнения нужно уметь составить уравнение по условию задачи и верно интерпретировать результаты его решения.

Задание 10. На рисунке изображены графики функций видов $f(x) = \frac{k}{x}$ и $g(x) = ax + b$, пересекающиеся в точках А и В. Найдите абсциссу точки В.



Успешно справились участники экзамена с выполнением новой линии (с 2022 года) задания 10, проверяющего умения выполнять действия с функциями и анализировать графики функций. Среди неправильных ответов присутствовали даже такие, как -2 , -8 , -48 , явно противоречащие рисунку с графиками функций.

Наиболее сложным заданием первой части оказалось задание 11.

Задание 11. Найдите наименьшее значение функции $y = x\sqrt{x} - 6x + 3$ на отрезке $[0; 40]$.

Задание проверяет умение применять производную к исследованию функции. Здесь важно знать правила нахождения производных и производные элементарных функций, а также уметь определить связь между характером монотонности функции и знаком ее производной, находить точки экстремума и знать алгоритм нахождения наибольших (наименьших) значений непрерывной функции на отрезке.

При выполнении задания 11 допущено много ошибок, как вычислительного характера, так и показывающих слабое овладения базовыми умениями исследования функции с помощью производной.

Среди заданий с полным решением наибольшее количество полных баллов, как и в прошлые годы, получено по заданиям 12 и 14. Отдельно следует уровень выполнения практико-ориентированных заданий, связанных с применением математики, что показывает успешность мер по формированию функциональной грамотности; в частности, заметен успех в выполнении заданий на применение математики при решении задач с экономическим содержанием.

Задание 12 – тригонометрическое уравнение. Задание повышенного уровня сложности с развернутым ответом. Типичные ошибки при выполнении: неумение решать простейшие тригонометрические уравнения; незнание числовых значений тригонометрических функций углов; неумение выносить общий множитель за скобки; неумение переносить из одной части равенства в другую.

Задачи по стереометрии 13, планиметрии 16 и уравнение с параметром 17 остаются наиболее сложными задачами части 2 профильного ЕГЭ по математике. Приведем примеры заданий с развернутым ответом, решаемость которых в 2023 году оказалась меньше 15%.

Задание 13. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AB . Точка P делит ребро AB в отношении $AP:PB = 1:3$, а точка Q – середина ребра A_1C_1 . Через середину M ребра BC провели плоскость α , перпендикулярную отрезку PQ .

а) Докажите, что плоскость α делит ребро AC пополам.

б) Найдите отношение, в котором плоскость α делит ребро A_1C_1 , считая от точки A_1 , если известно, что $AB = AA_1$, $AB:BC = 2:5$.

При выполнении задания 13 выпускниками допущены следующие типичные ошибки: сложности в построении сечения; незнание признака параллельности прямой и плоскости; неумение находить угол между плоскостями; вычислительные ошибки.

Задание 16. Биссектрисы углов BAD и BCD равнобедренной трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O . На боковых сторонах AB и CD отмечены точки M и N соответственно так, что $AM = MO$, $CN = NO$.

а) Докажите, что точки M , O и N лежат на одной прямой.

б) Найдите отношение $AM:MB$, если $AO = CO$ и $BC:AD = 17:31$.

Для задания 16 типичными ошибками при выполнении остаются: сложности при применении алгебраического метода при решении геометрических задач; незнание свойств ромба; сложности с применением метода дополнительных построений.

Геометрические задания 13 (стереометрия) и 16 (планиметрия) относятся к повышенному уровню сложности. Эти задания решают в основном участники ЕГЭ, претендующие на высокий балл. Успешное выполнение этих заданий возможно только при систематическом изучении курса геометрии. Задание 13 проверяет сформированность наглядных представлений об изученных стереометрических фигурах, а также умения строить сечения, проводить доказательства, пользуясь изученными

фактами о взаимном расположении прямых и плоскостей, находить геометрические величины, пользуясь теоремами об объёмах и площадях поверхности геометрических тел. Задание 16 – планиметрическая задача, проверяющая умения пользоваться изученными геометрическими фактами и теоремами, исследовать геометрические конфигурации на плоскости. Оба задания содержат два пункта. В первом пункте задания доказать, а во втором пункте – вычислить.

Наибольшие затруднения участники испытывали при оформлении доказательства. Низкая успешность выполнения задания 13 свидетельствует о несформированности пространственных представлений у выпускников.

Низкий процент выполнения геометрических заданий свидетельствует о сохраняющихся системных недостатках в преподавании геометрии. Одна из причин – рассмотрение лишь тех типов задач, которые встречались на экзамене в предыдущие годы, вместо полноценного изучения геометрии.

Задание 14. Решить неравенство $\log_4((x-5)(x^2-2x-15))+1 \geq 0,5 \log_2(x-5)^2$.

Неравенства решают преимущественно экзаменуемые с высоким и средним уровнями подготовки, а слабо подготовленные участники к этому заданию не приступают. Важно отметить, что подавляющее большинство участников экзамена, нашедших путь решения, верно доводит его до конца, что показывает рост математической культуры выпускников.

Задание 15. В июле 2025 года планируется взять кредит на десять лет в размере 1400 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на 10 % по сравнению с концом предыдущего года;

- с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;

- в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

- в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

- к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 2120 тыс. рублей. Сколько рублей составит платёж в 2026 году?

Практико-ориентированная задача, связанная с финансовыми расчетами. В этом году основная проблема состояла в построении более сложной по сравнению с прошлым годом математической модели.

Задание 17. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (xy - 2x + 12)\sqrt{y - 2x + 12} = 0, \\ y = ax - 10 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Задание высокого уровня сложности проверяет сформированность умений комбинировать различные изученные алгоритмы для решения задач, использовать различные методы, включая графические. Для решения задачи необходимы развитая математическая культура, умение проводить исследование системы уравнений на совместность и количество решений. Навыки, необходимые для верного выполнения данного задания, формируются на протяжении многих лет обучения математике.

В задании 17 типичные ошибки и недочеты при выполнении: потеря условия неотрицательности подкоренного выражения; при решении графическим методом не видят пучок прямых; при применении графического метода имели место ошибки в построении графиков; вычислительные ошибки. Наибольшие проблемы: непонимание

логики задачи и анализ условия; неумение искать ключевые факты и делать необходимые обоснования; применять свойства функций и строить графики, использовать геометрические интерпретации. Основными ошибками при решении данного задания было неверное комбинирование алгебраического и графического методов решения, подмена одного другим и неверная интерпретация полученных уравнений и затем чертежей.

Задание 18. Из пары натуральных чисел $(a; b)$ за один ход можно получить пару $(a + 2; b - 1)$ или $(a - 1; b + 2)$ при условии, что оба числа в новой паре положительны. Сначала есть пара $(5; 7)$.

а) Можно ли за 50 таких ходов получить пару, в которой одно из чисел равно 100?

б) За какое число ходов получится пара, сумма чисел в которой равна 400?

в) Какое наибольшее число ходов можно сделать так, чтобы после каждого хода оба числа в паре не превосходили 100?

Для успешного выполнения задания 18 необходимо уметь осуществлять поиск решения, выбирая различные подходы из числа известных, модифицируя изученные методы. Первый пункт выполнили те, кто внимательно прочитал условие, понял закономерности, попробовал исследовать несколько примеров, а потом обобщил полученный результат.

Важно отметить, что в 2023 году сохраняется заметный разрыв между уровнями алгебраической и геометрической подготовки выпускников. Таким образом, анализ выполнения заданий с развернутым ответом подтверждает необходимость более глубокого изучения математики (особенно геометрии). Это говорит о том, что необходимо продолжать работу по развитию геометрической составляющей школьной математики, в том числе по формированию наглядных геометрических представлений в основной школе, которые станут базой для изучения стереометрии, правильность планируемых мер по детализации требований ФГОС в части геометрии.

Анализ метапредметных результатов обучения, повлиявших на выполнение заданий КИМ ЕГЭ по математике

В соответствии с требованиями ФГОС СОО должны быть достигнуты не только предметные, но и метапредметные результаты обучения, в том числе:

- владение навыками познавательной, учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыками разрешения проблем;

- способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания;

- готовность и способность к самостоятельной информационно-познавательной деятельности, умение ориентироваться в различных источниках информации, критически оценивать и интерпретировать информацию, получаемую из различных источников;

- владение языковыми средствами – умение ясно, логично и точно излагать свою точку зрения, использовать адекватные языковые средства.

Результат сформированности таких умений и навыков особенно проявляется при решении заданий второй части с развернутым ответом, когда требуется применить свои знания либо в измененной, либо в новой для них ситуации. При этом участникам экзамена необходимо проанализировать ситуацию, самостоятельно «сконструировать» математическую модель и способ решения, используя знания из различных разделов школьного курса математики, обосновать и математически грамотно записать полученное решение.

Приведем вспомогательную таблицу для выявления метапредметных умений, влияющих на выполнение заданий КИМ ЕГЭ по математике.

Номер задания в КИМ	Уровень сложности (Б– базовый П–повышенный В–высокий) / Максимальный балл / Примерное время выполнения на профильном уровне (в мин.)	Проверяемые требования (умения) / Проверяемые элементы содержания (по кодификатору)	Проверяемые требования к уровню подготовки (по кодификатору)	Перечень метапредметных умений, которые могли повлиять на выполнение задания, в том числе познавательные, коммуникативные, регулятивные
1	Б / 1 / 3	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами 5.1. Планиметрия 5.5. Измерение геометрических величин	4.1. решать планиметрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей); 5.2. моделировать реальные ситуации на языке геометрии, исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры; решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических величин	– владение методами доказательств и алгоритмами решения; умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач; – владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах; – сформированность умения распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры; применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием; – сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; – владение основными понятиями о плоских и пространственных

				<p>геометрических фигурах, их основных свойствах;</p> <p>-сформированность умения распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры; применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием</p>
2	Б / 1 / 3	<p>Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами /</p> <p>5.2. Прямые и плоскости в пространстве</p> <p>5.3. Многогранники</p> <p>5.4. Тела и поверхности вращения</p> <p>5.5. Измерение геометрических величин</p>	<p>4.2. решать простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объёмов); использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы</p>	<p>– владение методами доказательств и алгоритмами решения; умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;</p> <p>– владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах;</p> <p>-сформированность умения распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры; применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием</p>
3	Б / 1 / 2	<p>Уметь строить и исследовать простейшие математические модели /</p> <p>6.3. Элементы теории вероятностей</p>	<p>5.4. моделировать реальные ситуации на языке теории вероятностей и статистики, вычислять в простейших случаях вероятности событий</p>	<p>– сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления;</p> <p>– сформированность представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, о статистических закономерностях в</p>

				реальном мире, об основных понятиях элементарной теории вероятностей; умений находить и оценивать вероятности наступления событий в простейших практических ситуациях и основные характеристики случайных величин
4	П / 1 / 8	Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни / 6.3. Элементы теории вероятностей	5.4. моделировать реальные ситуации на языке теории вероятностей и статистики, вычислять в простейших случаях вероятности событий	– сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; – сформированность представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, о статистических закономерностях в реальном мире, об основных понятиях элементарной теории вероятностей; умений находить и оценивать вероятности наступления событий в простейших практических ситуациях и основные характеристики случайных величин
5	Б / 1 / 2	Уметь решать уравнения и неравенства / 2.1. Уравнения	2.1. решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения, их системы	– владение стандартными приёмами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем
6	Б / 1 / 3	Уметь выполнять вычисления и преобразования / 1.1. Числа, корни и степени 1.2. Основы тригонометрии	1.1. выполнять арифметические действия, сочетая устные и письменные приёмы;	– сформированность представлений о математике как части мировой культуры и о месте математики в современной цивилизации, о способах описания на

		<p>1.3. Логарифмы 1.4. Преобразования выражений</p>	<p>находить значения корня натуральной степени, степени с рациональным показателем, логарифма; 1.2. вычислять значения числовых и буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования; 1.3. проводить по известным формулам и правилам преобразования буквенных выражений, включающих степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции</p>	<p>математическом языке явлений реального мира; – владение стандартными приёмами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем</p>
7	Б / 1 / 4	<p>Уметь выполнять действия с функциями / 4.1. Производная 4.2. Исследование функций 4.3. Первообразная и интеграл</p>	<p>3.1. определять значение функции по значению аргумента при различных способах задания функции; описывать по графику поведение и свойства функции, находить по графику функции наибольшее и наименьшее значения; строить графики изученных функций; 3.2. вычислять производные и первообразные элементарных функций; 3.3. исследовать в простейших случаях функции на монотонность,</p>	<p>– сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; – сформированность представлений об основных понятиях, идеях и методах математического анализа</p>

			находить наибольшее и наименьшее значения функции	
8	П / 1 / 6	Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни / 2.1. Уравнения 2.2. Неравенства	6.1. анализировать реальные числовые данные, информацию статистического характера; осуществлять практические расчёты по формулам; пользоваться оценкой и прикидкой при практических расчётах 6.2. описывать с помощью функций различные реальные зависимости между величинами и интерпретировать их графики; извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках 6.3. решать прикладные задачи, в том числе социально-экономического и физического характера, на наибольшие и наименьшие значения, нахождение скорости и ускорения	– сформированность представлений о математике как части мировой культуры и о месте математики в современной цивилизации, о способах описания на математическом языке явлений реального мира; – сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления – сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления – сформированность представлений об основных понятиях, идеях и методах математического анализа
9	П / 1 / 7	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели / 2.1. Уравнения 2.2. Неравенства	5.1. моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения и неравенства по условию задачи; исследовать	– сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления;

			построенные модели с использованием аппарата алгебры	– владение стандартными приёмами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем
10	П / 1 / 8	Уметь выполнять действия с функциями / 2.1. Уравнения 2.2. Неравенства 3.1. Определение и график функции 3.2. Элементарное исследование функций 3.3. Основные элементарные функции	3.1. определять значение функции по значению аргумента при различных способах задания функции; описывать по графику поведение и свойства функции, находить по графику функции наибольшее и наименьшее значения; строить графики изученных функций; 5.1. моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения и неравенства по условию задачи; исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры	– сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; – сформированность представлений об основных понятиях, идеях и методах математического анализа; – сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; – владение стандартными приёмами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем
11	П / 1 / 9	Уметь выполнять действия с функциями / 4.1. Производная 4.2. Исследование функций	3.1. определять значение функции по значению аргумента при различных способах задания функции; описывать по графику поведение и свойства функции, находить по графику функции наибольшее и наименьшее	– сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; – сформированность представлений об основных понятиях, идеях и методах математического анализа

			<p>значения; строить графики изученных функций;</p> <p>3.2. вычислять производные и первообразные элементарных функций;</p> <p>3.3. исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшее и наименьшее значения функции</p>	
12	П / 2 / 10	<p>Уметь решать уравнения и неравенства /</p> <p>2.1. Уравнения</p> <p>2.2. Неравенства</p>	<p>2.1. решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения, их системы;</p> <p>2.2. решать уравнения, простейшие системы уравнений, используя свойства функций и их графиков; использовать для приближенного решения уравнений и неравенств графический метод;</p> <p>2.3. решать рациональные, показательные и логарифмические неравенства, их системы</p>	<p>– владение стандартными приёмами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем</p>
13	П / 3 / 20	<p>Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами /</p> <p>5.2. Прямые и плоскости в</p>	<p>4.2. решать простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов,</p>	<p>– владение методами доказательств и алгоритмами решения; умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;</p>

		<p>пространстве 5.3. Многогранники 5.4. Тела и поверхности вращения 5.5. Измерение геометрических величин 5.6. Координаты и векторы</p>	<p>площадей, объёмов); использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы; 4.3. определять координаты точки; проводить операции над векторами, вычислять длину и координаты вектора, угол между векторами; 5.2. моделировать реальные ситуации на языке геометрии, исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры; решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических величин; 5.3. проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений, распознавать логически некорректные рассуждения</p>	<p>– владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах; – сформированность умения распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры; применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием; – сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; – владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах; сформированность умения распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры; применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием; – сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; – владение методами доказательств и алгоритмов решения; умение их применять, проводить доказательные рассуждения в</p>
--	--	---	--	---

				ходе решения задач
14	П / 2 / 15	Уметь решать уравнения и неравенства / 2.1. Уравнения 2.2. Неравенства	2.3. решать рациональные, показательные и логарифмические неравенства, их системы	– владение стандартными приёмами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем
15	П / 2 / 25	Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни / 1.1. Числа, корни и степени 2.1.12. Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учёт реальных ограничений	6.1. анализировать реальные числовые данные, информацию статистического характера; осуществлять практические расчёты по формулам; пользоваться оценкой и прикидкой при практических расчётах; 6.3. решать прикладные задачи, в том числе социально-экономического и физического характера, на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение скорости и ускорения	– сформированность представлений о математике как части мировой культуры и о месте математики в современной цивилизации, о способах описания на математическом языке явлений реального мира; – сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; – сформированность представлений об основных понятиях, идеях и методах математического анализа
16	П / 3 / 35	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами / 5.1. Планиметрия 5.5. Измерение геометрических величин	4.1. решать планиметрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей); 4.3. определять координаты точки; проводить операции над векторами, вычислять длину и координаты вектора, угол между векторами; 5.2. моделировать реальные	– владение методами доказательств и алгоритмами решения; умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач; – владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах; – сформированность умения распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры;

			<p>ситуации на языке геометрии, исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры; решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических величин;</p> <p>5.3. проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений, распознавать логически некорректные рассуждения</p>	<p>применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием;</p> <ul style="list-style-type: none"> – сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; – владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах; сформированность умения распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры; <p>применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием;</p> <ul style="list-style-type: none"> – сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; – владение методами доказательств и алгоритмов решения; умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач
17	В / 4 / 35	<p>Уметь решать уравнения и неравенства /</p> <p>2.1. Уравнения</p> <p>2.2. Неравенства</p> <p>3.1. Определение и график функции</p>	<p>2.1. решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения, их системы;</p>	<ul style="list-style-type: none"> – владение стандартными приёмами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем; – сформированность представлений о

		<p>3.2. Элементарное исследование функций</p> <p>3.3. Основные элементарные функции</p>	<p>2.2. решать уравнения, простейшие системы уравнений, используя свойства функций и их графиков; использовать для приближенного решения уравнений и неравенств графический метод;</p> <p>2.3. решать рациональные, показательные и логарифмические неравенства, их системы;</p> <p>5.1. моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения и неравенства по условию задачи; исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры</p>	<p>математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; – владение стандартными приёмами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем</p>
18	В / 4 / 40	<p>Уметь строить и исследовать простейшие математические модели /</p> <p>1.1. Числа, корни и степени</p> <p>1.2. Основы тригонометрии</p> <p>1.3. Логарифмы</p> <p>1.4. Преобразования выражений</p> <p>2.1. Уравнения</p> <p>2.2. Неравенства</p> <p>3.1. Определение и график функции</p> <p>3.2. Элементарное исследование функций</p>	<p>5.1. моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения и неравенства по условию задачи; исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры;</p> <p>5.3. проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений, распознавать логически</p>	<p>– сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления;</p> <p>– владение стандартными приёмами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем;</p> <p>– сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать</p>

		3.3. Основные элементарные функции	некорректные рассуждения	разные процессы и явления; – владение методами доказательств и алгоритмов решения; умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач
<p>Всего заданий – 18; из них по типу заданий: с кратким ответом – 11; с развёрнутым ответом – 7; по уровню сложности: Б – 6; П – 10; В – 2. Общее время выполнения работы – 3 часа 55 минут (235 мин.).</p>				

Необходимо отметить, что именно проблема с метапредметными результатами, а не предметные дефициты, является частой причиной низкой решаемости некоторых заданий, особенно базового уровня сложности. Так, выпускникам предлагались задания, требующие знаний в области физики (задания 8 и 9), экономики (задание 15), логики (задание 18). Задание 4 направлено на способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания, а также готовность и способность к самостоятельной информационно-познавательной деятельности. Можно констатировать, что данное метапредметное умение сформировано недостаточно. Ошибки при выполнении этих заданий могли быть связаны с недостаточной сформированностью следующих метапредметных умений:

- переносить знания в познавательную и практическую области жизнедеятельности;
- готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания, способность критически оценивать и интерпретировать информацию.

Больше внимания следует обратить на формирование умений анализировать текстовую информацию и моделировать практическую ситуацию математическими методами. Низкий процент выполнения геометрических заданий 13 и 16 свидетельствует о недостаточном владении навыками познавательной рефлексии как осознания совершаемых действий и мыслительных процессов, их результатов и оснований, границ своего знания и незнания, новых познавательных задач и средств их достижения. Невысокий процент выполнения геометрических задач 13, 16 говорит о недостаточной сформированности следующих метапредметных умений: выявлять причинно-следственные связи и актуализировать задачу, выдвигать гипотезу её решения, находить аргументы для доказательства своих утверждений.

При выполнении всех заданий КИМ выпускникам необходимо проявить владение универсальными учебными регулятивными действиями, направленными на самоорганизацию собственной деятельности:

- умение выявлять проблемы для решения в жизненных и учебных ситуациях;
- ориентироваться в различных подходах принятия решений;
- самостоятельно составлять алгоритм решения задачи (или его часть);
- выбирать способ решения задачи с учетом имеющихся ресурсов и собственных возможностей;
- аргументировать предлагаемые варианты решений;
- составлять план действий (план реализации намеченного алгоритма решения);
- делать выбор и брать ответственность за решение.

С другой стороны, без владения математическим аппаратом, невозможно достичь положительных результатов при изучении школьниками других дисциплин. Именно анализ некоторых практико-ориентированных заданий КИМ ЕГЭ по математике позволяет оценить уровень освоения метапредметных результатов и функциональной грамотности.

Таким образом, все задания КИМ по математике можно условно разделить на задания репродуктивного (различение, запоминание) и продуктивного (понимание и применение, изобретение) уровней.

Задания репродуктивного уровня предполагают действия по заранее известному алгоритму. К таким заданиям можно отнести задания 1–3, 5, 6, 11.

Задания 7–10, 12, 14, 16 предполагают действия как на репродуктивном, так и на продуктивном уровнях.

Задания 4, 13, 15, 17 и 18 требуют метапредметных навыков: понимания, переноса, умения придумывать. Задания по математике продуктивного уровня

традиционно вызывают затруднения, так как они требуют понимания, часто переноса с формального в конкретный планы и обратно, мышления не по заранее отработанному алгоритму.

Умение решать задания 17, 18 высокого уровня сложности демонстрирует владение навыками познавательной, учебно-исследовательской деятельности, навыками разрешения проблем. Процент выполнения этих задач невысок, что свидетельствует о недостаточной сформированности указанных метапредметных результатов.

Метапредметные умения в задачах продуктивного уровня сформированы не у всех участников экзамена, не все обучающиеся могут применять полученные знания в нестандартных задачах и ситуациях. Учителям математики стоит обратить на это внимание, так как эти навыки позволяют обучающимся не только решать задачи по математике, но и использовать их в повседневной жизни при решении бытовых задач.

Говоря о метапредметных результатах обучения, прежде всего стоит отметить плохо сформированный навык смыслового чтения. Как правило, задача решается неверно не из-за нехватки знаний по математике, а именно из-за неумения верно прочитать и понять условие. На умение решать геометрические задачи очень сильное влияние оказывает умение ясно и логично излагать последовательность шагов доказательства или решения, умение пользоваться языком математики при написании решения. Для выполнения заданий высокого уровня сложности школьники должны уметь решать практические задачи, самостоятельно искать методы решения, комбинировать известные методы, чтобы решить нестандартную задачу. Для этого они должны обладать навыками решения поисковых задач, которые вырабатываются при решении заданий из различных областей знаний.

Важным метапредметным умением, которое развивается на уроках математики, является представление о масштабе, об изменении геометрических величин при пропорциональном изменении размеров фигуры. В учебниках геометрии есть теорема о том, что отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия. Доказательство этой теоремы обычно опирается на вспомогательную теорему об отношении площадей треугольников, имеющих одинаковый угол. В результате школьники плохо понимают последовательность рассуждений и общность самого факта.

В 2023 году сформированность метапредметных результатов повлияла на решение прикладных задач с физическим смыслом (8), текстовых задач на движение, совместную работу, смеси и сплавы (9), задач с экономическим содержанием (15), геометрических задач (13, 16). О недостаточной сформированности навыков исследовательской деятельности можно судить по низкому проценту выполнения 17 и 18 заданий высокого уровня сложности, при решении которых возникли проблемы с пониманием условия задачи, с умением применять нестандартные или комбинированные методы решения задач.

Рекомендации для системы образования Томской области

Анализ результатов ЕГЭ по математике в 2023 году позволяет сформулировать некоторые общие рекомендации по совершенствованию процесса преподавания предмета:

- продолжать изучение основных документов ЕГЭ (спецификация КИМ, кодификатор проверяемых требований к образовательным результатам и элементов содержания, демонстрационный вариант КИМ) и всей нормативной базы, которая определяет подходы к отбору содержания и построению КИМ, учитывая изменения, которые уже коснулись и будут внесены в ближайшее время в КИМ ЕГЭ;

- в учебный процесс обязательно включать задания, предусматривающие контроль качества освоения материала на базовом и профильном уровнях, и разъяснять обучающимся принципы отбора и построения КИМ;
- усилить системность и систематичность в изучении всего программного учебного материала (и геометрического в том числе), что может быть достигнуто в результате постепенного накопления и последовательного усложнения изученного материала, периодически проводимого закрепления уже изученного;
- применять различные виды учебной деятельности и контроля знаний обучающихся на уроках и во внеурочной деятельности;
- уделять в работе с обучающимися особое внимание организационной и психологической составляющей подготовки к экзамену, контролю времени и применению простых приемов самоконтроля, формировать умение длительного занятия математикой (экзамен профильного уровня продолжается практически 4 часа, а базового – 3 часа).

Важно обратить внимание на то, что наименее эффективным способом подготовки является решение заданий из типовых вариантов ЕГЭ. Решение полных типовых вариантов следует проводить не чаще одного раза в месяц. Часть времени следует посвятить выполнению индивидуально подобранных тренингов по темам, которые вызывают затруднение у конкретных обучающихся.

Рекомендации по совершенствованию преподавания учебного предмета всем обучающимся

Учителям, методическим объединениям учителей:

1. Разрабатывать и проводить семинары для учителей математики с участием экспертов предметной комиссии по математике для дальнейшего использования их опыта при подготовке школьников к сдаче ЕГЭ по математике.
2. Учителям необходимо своевременно знакомиться и работать с документацией по ЕГЭ (документы, определяющие структуру и содержание КИМ ЕГЭ, открытый банк заданий ЕГЭ, учебно-методические материалы для председателей и членов региональных предметных комиссий по проверке выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ). Нужную информацию можно найти на сайте ФИПИ www.fipi.ru.
3. При подготовке к ЕГЭ необходимо донести до выпускников информацию о наличии Открытого банка заданий по математике www.mathege.ru, главная задача которого дать представление о том, какие задания могут быть в вариантах Единого государственного экзамена по математике в следующем году, и помочь выпускникам сориентироваться при подготовке к экзамену.
4. При подготовке к ЕГЭ использовать демоверсию варианта, проект которой будет выложен на сайте www.fipi.ru.
5. При планировании образовательного процесса по подготовке к ГИА в 10–11 классах соотносить программный материал с кодификатором и спецификацией КИМ с целью обеспечения при обучении полного охвата обозначенных в них тем.
6. Выстраивать систему подготовки к экзамену с помощью диагностических работ, направленных на выявление проблем у обучающихся.
7. Особое внимание обратить на решение задач повышенной сложности по теории вероятностей с использованием формул полной вероятности, формул Бернулли, формул сложения и умножения вероятностей, определения зависимых и независимых, совместных и несовместных событий, понятия условной вероятности.
8. Необходимо обратить серьезное внимание на систематическое изучение геометрии. Важно, как можно чаще привлекать наглядность, геометрические образы и

естественные соображения для решения, казалось бы, совершенно абстрактных задач. Причем речь идет не о «натаскивании» на решение конкретных задач, предлагавшихся в различных вариантах ЕГЭ, а именно о серьезном систематическом изучении предмета. Кроме того, необходимо выстроить четкую систему отработки базовых навыков стереометрии и контролировать их освоение. Формировать умения проводить обоснованные решения геометрических задач и математически грамотно их записывать.

9. Необходимо повысить объем необычных и творческих заданий в учебном процессе, требующих от обучающихся нестандартного алгоритма действий, где надо применять полученные знания в измененных и новых ситуациях, поскольку такая работа приводит к более глубоким математическим знаниям, повышает заинтересованность учащихся к улучшению результатов ЕГЭ. Включать в процесс обучения задачи практического содержания, задачи, требующие переформулирования условия, нестандартные задачи.

10. В процессе обучения следует особенное внимание уделять формированию умений выделять в условии задания главное, устанавливать причинно-следственные связи между отдельными элементами содержания. Необходимо добиваться понимания обучающимися того, что успешное выполнение любого задания предполагает тщательный анализ его условия и выбор верной последовательности действий.

11. Необходимо, чтобы учителя в школе еще больше обращали внимание на знание формул площадей фигур, объема и основные геометрические понятия. Это касается и изучения формул сокращенного умножения, и преобразование выражений, включающих арифметические операции. Как всегда, оставляет желать лучшего отработка заданий, связанных с геометрией, с производной, задачи на работу, движение, смеси.

12. При изучении функциональной линии целесообразно усилить практическую направленность, в частности, отработку теоретической основы алгоритма исследования функции и вычисления точек экстремума, определения промежутков монотонности функции, использования связи графика функции и графика ее производной, нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке, знание геометрического смысла производной.

13. Знакомить учащихся с обобщенным методом интервалов и методом рационализации.

14. При изучении геометрического материала важно формировать у школьников понимание общих подходов к решению задач, проводить анализ условия задачи, выделять базовые или опорные задачи, необходимые для решения, грамотно выполнять построения и читать чертеж, использовать необходимые формулы, усилить направление работы, связанное с решением геометрических задач и задач на доказательство.

15. При изучении стереометрии следует обратить внимание на задачи, связанные с построением сечений, а также на задачи, связанные с нахождением углов между прямыми, между прямой и плоскостью, между плоскостями, расстоянием между скрещивающимися прямыми. Следует обратить особое внимание на задачи, связанные с доказательством принадлежности точек прямой и принадлежности точки плоскости. Обратить внимание на координатно-векторный способ решения.

Кроме того, можно выделить конкретные рекомендации для учителей математики, связанные с подготовкой обучающихся к успешному прохождению ГИА, которые возможно стоит предварительно обсудить на заседании методического объединения. Например, есть наблюдение, что обучающиеся не обучены математической речи в той степени, которая необходима для ясного изложения мыслей при выполнении заданий с развернутым ответом (2-й части КИМ ЕГЭ по математике). При этом уровень математического мышления, техника математических преобразований

и вычислений у них могут быть достаточно развиты. Можно предположить, что проблема кроется, например, в злоупотреблении письменными видами работы, тестами (с краткими ответами); при этом школьники имеют мало практики в устных ответах, развернутых письменных математических сочинениях. Такой школьник может решить уравнение или неравенство, понимает математический смысл задачи, но в силу отсутствия практики не может ясно и последовательно записать решение.

К сожалению, остается проблема перекоса в математической подготовке школьников в сторону решения большого количества тренировочных работ по специализированным сборникам или вариантам прошлых лет. Давая своим ученикам клонированные варианты один за другим, учитель добивается, как ему кажется, безусловного и безукоризненного выполнения работ почти всеми учащимися класса. У него создается ложное мнение, что школьники готовы к сдаче ЕГЭ, и похожее впечатление возникает у самих школьников и их родителей. Проблема в том, что, решая экзаменационные задачи предыдущих лет, школьник готовится к прошлогоднему экзамену, а не к предстоящему. Достаточно ярко это проявилось в снижении процента выполнения экономической задачи, которая при эквивалентной сложности и внешней схожести не решалась буквальным повторением хода решения прошлогодней задачи.

При сдаче ЕГЭ одним из важных универсальных учебных регулятивных действий является умение выбирать способ решения учебной задачи с учетом имеющихся ресурсов и собственных возможностей, в том числе, ресурсов времени. Таким образом, успешность сдачи ЕГЭ может повыситься, если выпускник в процессе подготовки к ЕГЭ научится выбирать верные стратегии планирования времени. В этом направлении продуктивно организовывать тренировочные решения заданий демонстрационных вариантов ЕГЭ, предлагаемых ФИПИ, в режиме ограниченного времени.

Поэтому необходимо отдельно и еще раз подчеркнуть важность реализации в учебном процессе современных образовательных технологий и методов обучения, направленных на активизацию учебно-познавательной деятельности, формирование и развитие исследовательских навыков, универсальных учебных действий и функциональной грамотности обучающихся.

Целесообразно при решении разного типа задач включать открытые вопросы для группового обсуждения: «Что необходимо сделать, чтобы получить правильный ответ?», «Как вы думаете, какой результат может получиться?», «Что необходимо знать (уметь) для выполнения данного задания?». Также при подготовке продуктивно использовать чек-листы, оценочные листы как по отдельным темам, так и по отдельным предметным умениям, математические сочинения и эссе, творческие задания, исследовательские проект-задания и кейсы, приемы из технологии развития критического мышления и другое, содействовать участию обучающихся в математических сменах, олимпиадах, конференциях и конкурсах разного уровня.

Муниципальным органам управления образованием:

Организацию работы по подготовке к ЕГЭ по математике на муниципальном уровне и уровне общеобразовательной организации следует начать с анализа результатов ЕГЭ прошлого года:

- обсуждение статистических и методических материалов;
- сравнение результатов региона и муниципалитета с результатами школы и класса;
- определение типичных ошибок, допущенных учащимися.

Рекомендуется рассмотреть на методических объединениях (района, города) следующие вопросы: новые подходы к организации и содержанию традиционных и инновационных форм методической работы по математике; критерии оценки уровня

подготовки выпускников средней школы по математике; анализ результатов ГИА; использование современных образовательных технологий на уроках математики; представление опыта учителей, учащиеся которых показали высокие результаты на ЕГЭ.

Организовать проведение практических занятий, открытых уроков, обучающих семинаров с участием наиболее опытных педагогов с целью распространения лучших практик преподавания математики в школе, по выработке эффективных подходов к более качественному обучению.

Рекомендации по организации дифференцированного обучения школьников с разными уровнями предметной подготовки

Учителям, методическим объединениям учителей:

1. Проведение диагностики по материалам КИМ ЕГЭ по математике в сентябре – октябре текущего учебного года для дифференциации групп учащихся с разным уровнем освоения предмета.

2. Необходимо переработать рабочие программы с учетом наличия двух групп учащихся с разными перспективами профессиональной деятельности и разными образовательными запросами.

3. В работе с обучающимися, демонстрирующими высокие образовательные результаты, рекомендуем усилить компетентностную составляющую преподавания учебного предмета за счет заданий повышенного уровня сложности, направленных на формирование логического, системного мышления. Это будет способствовать формированию у обучающихся умения решать проблемные и практико-ориентированные задачи.

В работе с обучающимися, демонстрирующими средние и низкие образовательные результаты, особое внимание следует обратить на совершенствование всех видов деятельности. Учителям целесообразно использовать современные подходы к разработке инструментария проверки, оценки и отслеживания учебных достижений обучающихся.

4. Для успешного выполнения заданий повышенного уровня сложности необходим дифференцированный подход в работе с наиболее подготовленными учащимися. Это относится и к работе на уроке, и к дифференциации домашних заданий и заданий, предлагаемых учащимся на контрольных, проверочных, диагностических работах.

Подготовить даже очень сильных учащихся к выполнению последних заданий экзаменационной работы в условиях базовой школы не представляется возможным. Для этого необходима серьезная факультативная внеурочная работа под руководством подготовленных преподавателей. Также методическим объединениям рекомендуется обратить внимание на следующие затруднения участников на продуктивном уровне:

- умение проводить доказательные суждения. Большинство участников экзамена не понимают, что такое доказательство. Необходимо проанализировать примеры неверных доказательств утверждений задач 13, 16.

- умение проводить равносильные преобразования. В задаче 14 при решении дробно-рационального неравенства допускается большое число ошибок при преобразовании выражений.

5. При обучении математике необходимо выстроить систему изучения практической, жизненно важной математики в течение всех школьных лет. Сюда входят элементы финансовой и статистической грамотности, умение принимать решения на основе расчетов, навыки самоконтроля с помощью оценки возможных значений

физических величин на основе жизненного опыта и изучения предметов курса естествознания.

6. Необходимо усилить компетентностную составляющую преподавания математики за счет увеличения числа сюжетных задач, рассматриваемых на уроках алгебры и геометрии. Это будет способствовать формированию у обучающихся умения применять математические знания и решать практико-ориентированные задачи.

7. Особое внимание следует уделить своевременному изучению и повторению различных типов текстовых задач, рассмотрению графиков реальных зависимостей, разных типов диаграмм.

8. Систематически включать задания на повторение основных навыков (вычисление значений выражений, преобразование алгебраических выражений, действия с дробями, действия со степенями, решение линейных уравнений, неравенств и их систем и др.).

9. При повторении курса геометрии для преодоления устойчивых ошибок, систематически проверять знание обучающимися основных формул, формулировок теорем, свойств геометрических объектов, которые часто используются при решении задач.

10. Таким образом, в условиях двухуровневого экзамена возникает необходимость учитывать наличие двух групп учащихся, имеющих различные перспективы профессиональной деятельности. В связи с этим в школах следует изыскивать возможности создания рабочих программ по математике для различных целевых групп. Также необходимо выделить наиболее значимые направления работы с каждой группой обучающихся, исходя из их уровня подготовки и типичных проблем, которые необходимо компенсировать. Это позволит повысить эффективность использования учебных часов.

11. В целях организации дифференцированного обучения школьников необходимо составлять индивидуальную траекторию подготовки к экзамену на основе диагностики недостатков и их устранения в усвоении отдельных тем в процессе итогового повторения. Важно планировать обобщающее повторение курса математики с учетом основных содержательных линий курса.

12. Для учащихся, имеющих достаточный уровень базовой математической подготовки и планирующих сдавать профильный экзамен, следует оценить текущий уровень знаний, диагностировать проблемы в освоении курса, добиться успешного выполнения заданий части 1, а также определить круг заданий части 2, которые реально выполнить во время экзамена. Необходимо также уделять внимание тренировке безошибочного выполнения алгебраических преобразований и вычислений. При этом целесообразно регулярно проводить тренинг по заданиям части 1, что будет способствовать не только снижению вероятности случайной потери балла на экзамене, но и повышению общей культуры вычислений, которая важна при выполнении заданий с развернутым ответом.

13. Задания с кратким ответом (повышенного уровня) части 2 должны находить отражение в содержании математического образования, и аналогичные задания должны включаться в систему текущего и рубежного контроля. В записи решений к заданиям с развернутым ответом нужно обращать особое внимание на построение чертежей и рисунков, лаконичность пояснений, доказательность рассуждений.

14. Также при обучении и подготовке к ЕГЭ по профильной математике необходимо понимать трудности, с которыми столкнутся обучающиеся, и работать дифференцированно, то есть с каждой группой учащихся отдельно. Задания по сложности должны быть адекватными для выбранной группы. Безусловно, лишена всякого смысла практика, когда ученику, который слабо справляется с заданиями

первой части ЕГЭ по профильной математике, выдаются последние задания из второй части. Обязательно нужна грамотная диагностика уровня подготовки каждого ученика и обеспечение его именно теми заданиями, с которыми он, исходя из этого уровня, может справиться (со стороны педагогов и администрации образовательной организации).

Администрациям образовательных организаций можно рекомендовать:

- проанализировать результаты ЕГЭ на заседаниях педсоветов, методического совета, школьных методических объединений учителей математики;
- скорректировать методическую работу с педагогами по подготовке обучающихся к государственной итоговой аттестации по математике;
- руководителям образовательных организаций обеспечить прохождение всеми учителями соответствующей подготовки и их участие в городских, региональных методических мероприятиях.

Муниципальным органам управления образованием можно рекомендовать:

- организовать на муниципальных уровнях трансляцию эффективных педагогических практик общеобразовательных организаций с наиболее высокими результатами сдачи ГИА: мастер-классы с участием председателя и экспертов предметных комиссий, индивидуальные консультации, онлайн-занятия и другое;
- формировать престижное, статусное отношение к инженерным профессиям и профессии учителя, при этом увеличивая количество учебных часов на физико-математические дисциплины в школе (освоение которых способствует повышению качества изучения других предметов), формируя общественное мнение и понимание того, что какую бы будущую профессию не выбрал выпускник школы, способностями в какой бы области он не обладал, его успешность в жизни во многом зависит просто от качественного математического образования (это развитые мышление логическое, критическое, творческое, мыслительная культура, интеллектуальная самостоятельность, честность, объективность и другое).

Рекомендации по темам для обсуждения / обмена опытом на методических объединениях учителей-предметников

Для обсуждения на методических объединениях могут быть рекомендованы следующие вопросы и темы:

- определение мер по улучшению качества подготовки обучающихся по математике в 5–9 и 10–11 классах;
- анализ итогов ЕГЭ по предмету и задачи методического объединения по совершенствованию качества образовательного процесса;
- методический анализ типичных ошибок, допущенных выпускниками в ходе ЕГЭ по математике;
- осуществление корректировки учебно-тематического планирования в соответствии с результатами ЕГЭ по математике;
- разработка систем мер по профилактике типичных учебных затруднений обучающихся по темам, выносимым на ЕГЭ по математике;
- повышение эффективности работы с базовыми понятиями учебного курса «Математика» (проработка начального курса геометрии в 4–5 классах);
- презентация и распространение опыта образовательных организаций, показавших высокие результаты ГИА по математике;
- организация обмена опытом по подготовке учащихся к ЕГЭ внутри методического объединения / в рамках образовательной организации;

- изучение опыта работы методических объединений других школ по подготовке к ЕГЭ;
- создание эффективной системы профилактики неуспеваемости обучающихся по математике;
- разработка пакета разноуровневых заданий по наиболее сложным темам курса;
- характеристика особенностей выполнения заданий базового (повышенного, высокого) уровня при проведении ЕГЭ;
- использование разнообразных образовательных технологий при подготовке обучающихся к ЕГЭ по математике;
- эффективные подходы к разработке инструментария проверки, оценки и отслеживания учебных достижений обучающихся, в том числе в условиях цифровой образовательной среды;
- технология подготовки и проведения групповых и индивидуальных консультаций для учащихся в период подготовки к ЕГЭ по математике.

Обсуждение подобных вопросов позволит осуществить методическое погружение учителя математики в проблему, организовать изучение педагогических, теоретических и практических аспектов ЕГЭ:

- применение компьютерного моделирования в изучении математики (в геометрии и алгебре);
- использование 3D-технологий на уроках математики (в частности, на уроках геометрии);
- реализация системно-деятельностного подхода при проектировании современного урока математики;
- проектная деятельность учащихся в контексте интеграции учебной и внеурочной деятельности учащихся.

В ходе обсуждения результатов ЕГЭ важно организовать обмен мнениями учителей математики по наиболее сложным вопросам, возникающим в ходе подготовки и проведения процедуры ЕГЭ, которые имеют непосредственное отношение к содержанию деятельности каждого учителя, то есть осуществить своего рода проблематизацию его деятельности на разных этапах подготовки обучающихся к ЕГЭ. Всесторонний анализ собственного опыта учителя математики в контексте требований ЕГЭ, результатов выполнения КИМ за предыдущий год, оценка учебных и личностных достижений обучающихся по предмету, степени их готовности соответствовать критериям ЕГЭ помогут методическому объединению сформулировать приоритеты в методической работе с учителями.